

Conceptos: Particiones, normas, sumas superiores/inferiores y definición de integrabilidad.

1. Dada la función $f(x) = x^2$ en $[0, 2]$, calcule la suma inferior $L(f, P)$ para una partición regular de $n = 4$ subintervalos.
2. Para la misma función $f(x) = x^2$ en $[0, 2]$, calcule la suma superior $U(f, P)$ con $n = 4$.
3. Determine la **norma de la partición** $P = \{0, 0.5, 1.2, 1.8, 2\}$.
4. Use la definición de la Integral de Riemann para evaluar $\int_0^3 (2x + 1) dx$ mediante el límite de una suma de Riemann.
5. Demuestre que la función de Dirichlet es no integrable en el intervalo $[0, 1]$.
6. Calcule la suma de Riemann para $f(x) = \sin(x)$ en $[0, \pi]$ usando los puntos medios con $n = 3$.
7. Si $\|P\| \rightarrow 0$, demuestre analíticamente que la suma de Riemann de una función constante $f(x) = k$ en $[a, b]$ es siempre $k(b - a)$.
8. Encuentre los valores de $U(f, P)$ y $L(f, P)$ para $f(x) = 1/x$ en $[1, 3]$ con $n = 2$.
9. Defina una partición P de $[1, 5]$ tal que su norma sea exactamente 1.5.
10. Determine si $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (función parte entera) es integrable en $[0, 2.5]$.
11. Expresar el siguiente límite como una integral definida: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^3}{n^4}$.
12. Calcule la suma de Riemann para $f(x) = e^x$ en $[0, 1]$ usando los extremos derechos.

Conceptos: TFC Parte I (derivación de integrales), TFC Parte II (evaluación) y Teorema del Valor Medio (TVM).

13. Calcule $F'(x)$ si $F(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^4} dt$.
14. Aplique el TFC para hallar la derivada de $g(x) = \int_0^{x^2} \cos(t) dt$.
15. Calcule $\frac{d}{dx} \int_x^{x^2} \frac{1}{t} dt$ usando la regla de la cadena.
16. Halle el **valor promedio** de $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo $[1, 4]$.
17. Encuentre el valor de c que satisface el TVM para integrales para $f(x) = \sqrt{x}$ en $[0, 9]$.
18. Evalúe $\int_1^2 (\frac{1}{x} + e^x) dx$.
19. Evalúe $\int_0^{\pi/4} \sec^2(x) dx$.
20. Si $\int_2^8 f(x) dx = 10$ y $\int_5^8 f(x) dx = 4$, determine $\int_2^5 f(x) dx$.
21. Demuestre que si f es impar, $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
22. Calcule el valor promedio de $f(x) = \sin(x)$ en $[0, \pi]$.
23. Determine el área bajo la curva $f(x) = 1/x^2$ desde $x = 1$ hasta $x = 10$.
24. Resuelva la integral definida $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

Concepto: $\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$.

25. Evalúe $\int_0^1 x e^x dx$.
26. Evalúe $\int_1^e \ln(x) dx$.
27. Calcule $\int_0^\pi x \sin(x) dx$.
28. Halle el valor de $\int_0^1 \arctan(x) dx$.
29. Evalúe $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$.
30. Calcule $\int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx$.
31. Resuelva $\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arcsec}(x) dx$ (si es convergente).
32. Evalúe $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$.

Concepto: $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

33. Halle el área de la región limitada por $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$.
34. Calcule el área entre $y = \sin(x)$ y $y = \cos(x)$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/2$.
35. Determine el área de la región encerrada por $y = x^2 - 4$ y el eje x .
36. Encuentre el área entre las parábolas $y = x^2$ y $y = 2x - x^2$.
37. Calcule el área de la región limitada por $x = y^2$ y $x = y + 2$ (integrando respecto a y).
38. Halle el área entre $y = 1/x$, $y = x$ y $y = 1/4$ en el primer cuadrante.
39. Determine el área de la región limitada por $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ y $x = 1$.
40. Calcule el área de un círculo de radio r usando integrales definidas.

41. Calcule el volumen generado al rotar $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje x desde $x = 0$ hasta $x = 4$ (Método del disco).
42. Use el método de la arandela para hallar el volumen al rotar la región entre $y = x^2$ y $y = x$ alrededor del eje x .
43. Rotar la región del ejercicio 41 pero alrededor del eje y .
44. Halle el volumen de una esfera de radio R mediante rotación.
45. Calcule el volumen del sólido generado al rotar $y = \sin(x)$ en $[0, \pi]$ alrededor del eje x .
46. Halle la **longitud de arco** de la curva $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ desde $x = 0$ hasta $x = 3$.
47. Calcule la longitud de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ usando integrales.
48. Determine la longitud de arco de $y = \ln(\cos x)$ en $[0, \pi/4]$.
49. Use el método de los discos para hallar el volumen de un cono de altura h y radio r .
50. Calcule el volumen al rotar $y = e^x$ alrededor del eje x entre $x = 0$ y $x = 1$.
51. Halle la longitud de la catenaria $y = \cosh(x)$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.
52. Determine el volumen generado al rotar la región entre $y = x^2$ y $y = 4$ alrededor de la recta $y = 4$.

Conceptos: Momentos M_x , M_y , coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) y volúmenes con Pappus.

53. Halle los momentos M_x y M_y de una lámina homogénea limitada por $y = x^2$ y $y = 4$.
54. Calcule el **centroide** (\bar{x}, \bar{y}) de la región del ejercicio anterior.
55. Encuentre el centro de masa de una varilla de longitud L si su densidad lineal es $\rho(x) = kx$.
56. Determine el centroide de un semicírculo de radio r centrado en el origen.
57. **Teorema de Pappus:** Calcule el volumen de un toro (dona) generado al rotar un círculo de radio $r = 1$ centrado en $(3, 0)$ alrededor del eje y .
58. Use el Teorema de Pappus para hallar el volumen de un cono (sugerencia: rote un triángulo).
59. Halle el centroide de la región limitada por $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y el eje x .
60. Calcule el área de la superficie lateral generada al rotar $y = 2\sqrt{x}$ en $[0, 3]$ alrededor del eje x .